SET-1

Series BVM/2

कोड नं.
Code No. **65/2/1**

रोल नं.
Roll No. | | | | | | | |

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **11** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **11** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **29** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे | *अधिकतम अंक : 100*

Time allowed : 3 hours | *Maximum Marks : 100*

सामान्य निर्देश :

(i) ***सभी*** *प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(ii) *इस प्रश्न-पत्र में* ***29*** *प्रश्न हैं जो चार खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब, स तथा द । खण्ड अ में* ***4*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***एक अंक*** *का है । खण्ड ब में* ***8*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***दो अंक*** *का है । खण्ड स में* ***11*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***चार अंक*** *का है । खण्ड द में* ***6*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***छः अंक*** *का है ।*

(iii) *खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकतानुसार दिए जा सकते हैं ।*

(iv) *पूर्ण प्रश्न-पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी खण्ड अ के 1 प्रश्न में, खण्ड ब के 3 प्रश्नों में, खण्ड स के 3 प्रश्नों में तथा खण्ड द के 3 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है ।*

(v) *कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति* ***नहीं*** *है । यदि आवश्यक हो, तो आप लघुगणकीय सारणियाँ माँग सकते हैं ।*

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are compulsory.*

(ii) *The question paper consists of* ***29*** *questions divided into four sections A, B, C and D. Section A comprises of* ***4*** *questions of* ***one mark*** *each, Section B comprises of* ***8*** *questions of* ***two marks*** *each, Section C comprises of* ***11*** *questions of* ***four marks*** *each and Section D comprises of* ***6*** *questions of* ***six marks*** *each.*

(iii) *All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.*

(iv) *There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 1 question of Section A, 3 questions of Section B, 3 questions of Section C and 3 questions of Section D. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.*

(v) *Use of calculators is* ***not*** *permitted. You may ask for logarithmic tables, if required.*

खण्ड अ

SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 4 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

Question numbers 1 to 4 carry 1 mark each.

1. यदि A एक वर्ग आव्यूह है जिसमें $A'A = I$ है, तो $|A|$ का मान लिखिए ।

If A is a square matrix satisfying $A'A = I$, write the value of $|A|$.

2. यदि $y = x|x|$ है, तो $x < 0$ के लिए, $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

If $y = x|x|$, find $\frac{dy}{dx}$ for $x < 0$.

3. निम्न अवकल समीकरण की कोटि व घात (यदि परिभाषित है) ज्ञात कीजिए :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2x^2 \log\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

Find the order and degree (if defined) of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2x^2 \log\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

4. उस रेखा के दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक अक्षों से समान कोण बनाती है ।

अथवा

एक रेखा किसी एक बिन्दु, जिसका स्थिति सदिश $2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ है, से गुज़रती है और सदिश $\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ की दिशा में है । इस रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the direction cosines of a line which makes equal angles with the coordinate axes.

OR

A line passes through the point with position vector $2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ and is in the direction of the vector $\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$. Find the equation of the line in cartesian form.

खण्ड ब

SECTION B

प्रश्न संख्या 5 से 12 तक प्रत्येक प्रश्न के 2 अंक हैं ।

Question numbers 5 to 12 carry 2 marks each.

5. सभी वास्तविक संख्याओं के समुच्चय $\mathbb{R}$ पर परिभाषित संक्रिया $*$: $a * b = \sqrt{a^2 + b^2}$ क्या द्विआधारी है, इसकी जाँच कीजिए । यदि यह द्विआधारी है, तो ज्ञात कीजिए कि क्या यह साहचर्य है या नहीं ।

Examine whether the operation $*$ defined on $\mathbb{R}$, the set of all real numbers, by $a * b = \sqrt{a^2 + b^2}$ is a binary operation or not, and if it is a binary operation, find whether it is associative or not.

6. यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो दर्शाइए कि $(A - 2I)(A - 3I) = 0$.

If $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, show that $(A - 2I)(A - 3I) = 0$.

7. ज्ञात कीजिए :

$$\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\, dx$$

Find :

$$\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\, dx$$

8. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx$$

अथवा

ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x-3}{(x-1)^3}\, e^x\, dx$$

Find :

$$\int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx$$

OR

Find :

$$\int \frac{x-3}{(x-1)^3}\, e^x\, dx$$

9. वक्रों के कुल $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$, जहाँ A, B स्वेच्छ अचर हैं, को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the differential equation of the family of curves $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$, where A and B are arbitrary constants.

10. यदि $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 7$ तथा $\vec{a} \times \vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$ है, तो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए ।

अथवा

उस घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए जिसके किनारे $-3\hat{i} + 7\hat{j} + 5\hat{k}$, $-5\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $7\hat{i} - 5\hat{j} - 3\hat{k}$ द्वारा दिए गए हैं ।

If $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 7$ and $\vec{a} \times \vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$, find the angle between $\vec{a}$ and $\vec{b}$.

OR

Find the volume of a cuboid whose edges are given by $-3\hat{i} + 7\hat{j} + 5\hat{k}$, $-5\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k}$ and $7\hat{i} - 5\hat{j} - 3\hat{k}$.

11. यदि P(A नहीं) = 0·7, P(B) = 0·7 तथा P(B/A) = 0·5 है, तो P(A/B) ज्ञात कीजिए ।

If P(not A) = 0·7, P(B) = 0·7 and P(B/A) = 0·5, then find P(A/B).

12. एक सिक्का 5 बार उछाला गया । (i) 3 बार चित आने की प्रायिकता क्या है ? (ii) अधिकतम 3 बार चित आने की प्रायिकता क्या है ?

अथवा

दो सिक्कों को एक बार एक साथ उछालने पर चितों की संख्या, X का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए ।

A coin is tossed 5 times. What is the probability of getting (i) 3 heads, (ii) at most 3 heads ?

OR

Find the probability distribution of X, the number of heads in a simultaneous toss of two coins.

खण्ड स

SECTION C

प्रश्न संख्या 13 से 23 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं ।

Question numbers 13 to 23 carry 4 marks each.

13. जाँच कीजिए कि क्या समुच्चय A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} पर परिभाषित संबंध R = {(a, b) : b = a + 1} स्वतुल्य, सममित या संक्रामक है ।

अथवा

मान लीजिए कि $f : N \rightarrow Y$, $f(x) = 4x + 3$, द्वारा परिभाषित एक फलन है, जहाँ $Y = \{y \in N : y = 4x + 3$, किसी $x \in N$ के लिए$\}$ है । सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है । इसका प्रतिलोम फलन भी ज्ञात कीजिए ।

Check whether the relation R defined on the set A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} as R = {(a, b) : b = a + 1} is reflexive, symmetric or transitive.

OR

Let $f : N \rightarrow Y$ be a function defined as $f(x) = 4x + 3$,

where $Y = \{y \in N : y = 4x + 3, \text{ for some } x \in N\}$. Show that f is invertible. Find its inverse.

14. $\sin\left(\cos^{-1}\frac{4}{5} + \tan^{-1}\frac{2}{3}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

Find the value of $\sin\left(\cos^{-1}\frac{4}{5} + \tan^{-1}\frac{2}{3}\right)$.

15. सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके, दर्शाइए कि

$$\begin{vmatrix} 3a & -a+b & -a+c \\ -b+a & 3b & -b+c \\ -c+a & -c+b & 3c \end{vmatrix} = 3(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Using properties of determinants, show that

$$\begin{vmatrix} 3a & -a+b & -a+c \\ -b+a & 3b & -b+c \\ -c+a & -c+b & 3c \end{vmatrix} = 3(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

16. यदि $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ और $x \neq y$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x+1)^2}$.

अथवा

यदि $(\cos x)^y = (\sin y)^x$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

If $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ and $x \neq y$, prove that $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x+1)^2}$.

OR

If $(\cos x)^y = (\sin y)^x$, find $\frac{dy}{dx}$.

17. यदि, किसी $c > 0$ के लिए, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$, a और b से स्वतंत्र एक स्थिर राशि है ।

If $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$, for some $c > 0$, prove that

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$ is a constant independent of a and b.

18. वक्र $x^2 = 4y$ पर उस अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दु $(-1, 4)$ से गुज़रता है ।

Find the equation of the normal to the curve $x^2 = 4y$ which passes through the point $(-1, 4)$.

19. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{(x + 2)(x^2 + 1)} dx$$

Find :

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{(x + 2)(x^2 + 1)} dx$$

20. सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a - x)\,dx$$

अत:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

का मूल्यांकन कीजिए ।

Prove that

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a - x)\,dx$$

and hence evaluate

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

21. अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$x\frac{dy}{dx} = y - x \tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

अथवा

अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} = -\left[\frac{x + y \cos x}{1 + \sin x}\right]$$

Solve the differential equation :

$$x \frac{dy}{dx} = y - x \tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

OR

Solve the differential equation :

$$\frac{dy}{dx} = -\left[\frac{x + y \cos x}{1 + \sin x}\right]$$

22. सदिशों $\vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ और $\vec{c} = \lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ के लिए, सदिश $\vec{b} + \vec{c}$ के अनुदिश मात्रक सदिश व सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ का अदिश गुणनफल 1 है । λ का मान ज्ञात कीजिए और अत: $\vec{b} + \vec{c}$ के अनुदिश मात्रक सदिश भी ज्ञात कीजिए ।

The scalar product of the vector $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ with a unit vector along the sum of the vectors $\vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ and $\vec{c} = \lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ is equal to 1. Find the value of λ and hence find the unit vector along $\vec{b} + \vec{c}$.

23. यदि रेखाएँ $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2\lambda} = \frac{z-3}{2}$ और $\frac{x-1}{3\lambda} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-6}{-5}$ परस्पर लम्बवत् हों, तो λ का मान ज्ञात कीजिए । अत: ज्ञात कीजिए कि क्या ये रेखाएँ एक-दूसरे को काटती हैं या नहीं ।

If the lines $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2\lambda} = \frac{z-3}{2}$ and $\frac{x-1}{3\lambda} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-6}{-5}$ are perpendicular, find the value of λ. Hence find whether the lines are intersecting or not.

खण्ड द

SECTION D

प्रश्न संख्या 24 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं ।

Question numbers 24 to 29 carry 6 marks each.

24. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए ।

अत: निम्न समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिए :

$x + 3y + 4z = 8$

$2x + y + 2z = 5$

और $5x + y + z = 7$

अथवा

प्रारंभिक रूपांतरणों द्वारा, निम्न आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, find A^{-1}.

Hence solve the system of equations

$x + 3y + 4z = 8$

$2x + y + 2z = 5$

and $5x + y + z = 7$

OR

Find the inverse of the following matrix, using elementary transformations :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

25. सिद्ध कीजिए कि एक R त्रिज्या के गोले के अंतर्गत अधिकतम आयतन के बेलन की ऊँचाई $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ है । अधिकतम आयतन भी ज्ञात कीजिए ।

Show that the height of the cylinder of maximum volume that can be inscribed in a sphere of radius R is $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. Also find the maximum volume.

26. समाकलन विधि से उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (1, 0), (2, 2) और (3, 1) हैं ।

अथवा

समाकलन विधि से, दो वृत्तों $x^2 + y^2 = 4$ तथा $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Using method of integration, find the area of the triangle whose vertices are (1, 0), (2, 2) and (3, 1).

OR

Using method of integration, find the area of the region enclosed between two circles $x^2 + y^2 = 4$ and $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

27. बिन्दुओं, जिनके स्थिति सदिश $\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ हैं, से गुज़रने वाले समतल का सदिश व कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए । उपर्युक्त समतल के समांतर समतल, जो बिन्दु (2, 3, 7) से गुज़रता है, का समीकरण भी लिखिए । अत:, दोनों समांतर समतलों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए ।

अथवा

बिन्दुओं (2, – 1, 2) तथा (5, 3, 4) से गुज़रने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए तथा बिन्दुओं (2, 0, 3), (1, 1, 5) तथा (3, 2, 4) से गुज़रने वाले समतल का समीकरण भी ज्ञात कीजिए । रेखा व समतल का प्रतिच्छेदन बिन्दु भी ज्ञात कीजिए ।

Find the vector and cartesian equations of the plane passing through the points having position vectors $\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ and $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$. Write the equation of a plane passing through a point (2, 3, 7) and parallel to the plane obtained above. Hence, find the distance between the two parallel planes.

OR

Find the equation of the line passing through (2, – 1, 2) and (5, 3, 4) and of the plane passing through (2, 0, 3), (1, 1, 5) and (3, 2, 4). Also, find their point of intersection.

28. तीन सिक्के दिए गए हैं । एक सिक्के के दोनों ओर चित ही है । दूसरा सिक्का अभिनत है जिसमें चित 75% बार प्रकट होता है और तीसरा अनभिनत सिक्का है । तीनों में से एक सिक्का यादृच्छया चुना गया और उसे उछाला गया है । यदि सिक्के पर चित प्रकट हुआ हो, तो क्या प्रायिकता है कि वह दोनों तरफ चित वाला सिक्का है ?

There are three coins. One is a two-headed coin, another is a biased coin that comes up heads 75% of the time and the third is an unbiased coin. One of the three coins is chosen at random and tossed. If it shows heads, what is the probability that it is the two-headed coin ?

29. एक कंपनी दो प्रकार का सामान, A और B बनाती है, जिसमें सोने व चाँदी का उपयोग होता है । प्रकार A की प्रत्येक इकाई में 3 g चाँदी व 1 g सोना, तथा प्रकार B की प्रत्येक इकाई में 1 g चाँदी व 2 g सोना प्रयोग में आता है । कंपनी ज्यादा-से-ज्यादा 9 g चाँदी व 8 g सोने का ही प्रयोग कर सकती है । यदि प्रकार A की एक इकाई से ₹ 40 का लाभ व प्रकार B की एक इकाई से ₹ 50 का लाभ कमाया जाता है, तो अधिकतम लाभ अर्जित करने हेतु कंपनी को दोनों प्रकारों की कितनी-कितनी इकाइयाँ बनानी चाहिएँ ? उपर्युक्त समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या में परिवर्तित करके आलेख विधि से हल कीजिए तथा अधिकतम लाभ भी ज्ञात कीजिए ।

A company produces two types of goods, A and B, that require gold and silver. Each unit of type A requires 3 g of silver and 1 g of gold while that of type B requires 1 g of silver and 2 g of gold. The company can use at the most 9 g of silver and 8 g of gold. If each unit of type A brings a profit of ₹ 40 and that of type B ₹ 50, find the number of units of each type that the company should produce to maximize profit. Formulate the above LPP and solve it graphically and also find the maximum profit.