PYP - 2024

Mathematics

Q1 एक उद्देशय फलन $Z = ax + by$ बिंदुओं (8,2) और (4,6) पर अधिकतम है। यदि $a \geq 0$ और $b \geq 0$ और $ab = 25$ है, तो फलन का अधिकतम मान बराबर है:

(A) 60 (B) 50

(C) 40 (D) 80

Q2 रेखाओं $x + 2y = 12,\ x = 2,\ x = 6$ तथा x-अक्ष द्वारा सीमाबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है:

(A) 34 वर्ग इकाई

(B) 20 वर्ग इकाई

(C) 24 वर्ग इकाई

(D) 16 वर्ग इकाई

Q3 एक पासे को तीन बार फेंका जाता है। पहली और दूसरी बार फेंकने पर 4 से बड़ी संख्या तथा तीसरी बार फेंकने पर 4 से छोटी संख्या आने की प्रायिकता क्या है?

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{6}$

(C) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{1}{18}$

Q4 $x + y \leq 8,\ 2x + y \geq 8, x \geq 0, y \geq 0$ द्वारा निर्धारित सुसंगत क्षेत्र के कोनीय बिंदु $A(0, 8), B(4, 0)$ और $C(8, 0)$ हैं। यदि उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ का अधिकतम मान रेखाखंड AB पर है, तो a और b के बीच संबंध है:

(A) $8a + 4 = b$ (B) $a = 2b$

(C) $b = 2a$ (D) $8b + 4 = a$

Q5 यदि $t = e^{2x}$ और $y = \log_e t^2$, तब $\frac{d^2y}{dx^2}$ है

(A) 0 (B) $4t$

(C) $\frac{4e^{2t}}{t}$ (D) $\frac{e^{2t}(4t-1)}{t^2}$

Q6 यदि A और B समान कोटि के **सममित आव्यूह** हैं, तो $AB - BA$ होगा:

(A) सममित आव्यूह

(B) शून्य आव्यूह

(C) विषम-सममित आव्यूह

(D) इकाई आव्यूह

Q7 यदि A कोटि 4 का एक वर्ग आव्यूह है तथा $|A| = 4$ है, तो $|2A|$ होगा:

(A) 8 (B) 64

(C) 16 (D) 4

Q8 यदि $[A]_{3\times2}[B]_{x\times y} = [C]_{3\times1}$, तब :

(A) $x = 1, y = 3$ (B) $x = 2, y = 1$

(C) $x = 3, y = 3$ (D) $x = 3, y = 1$

Q9 यदि कोई फलन $f(x) = x^2 + bx + 1$ अंतराल $[1, 2]$ में वर्धमान (increasing) है, तो b का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

(A) 5 (B) 0

(C) −2 (D) −4

Q10 दो पासे एक साथ फेंके जाते हैं। यदि X चार की संख्या को दर्शाता है, तो X की अपेक्षा होगी:

(A) $\frac{5}{9}$ (B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{4}{7}$ (D) $\frac{3}{8}$

Q11 फलन $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5, x \in [0, 3]$ के लिए, सूची-I को सूची-II से सुमेलित करें:

सूची-I	सूची-II
(A) निरपेक्ष उच्चतम मान	(I) 3
(B) निरपेक्ष निम्नतम मान	(II) 0
(C) उच्चतम बिंदु	(III) -5
(D) निम्नतम बिंदु	(IV) 4

(A) (A) - (IV), (B) - (II), (C) - (I), (D) - (III)

(B) (A) - (II), (B) - (III), (C) - (I), (D) - (IV)

(C) (A) - (IV), (B) - (III), (C) - (II), (D) - (I)

(D) (A) - (IV), (B) - (III), (C) - (I), (D) - (II)

Q12 निम्नलिखित में से किस फलन का द्वितीय कोटि अवकलज 5^x है?

(A) $5^x \log_e 5$ (B) $5^x (\log_e 5)^2$

(C) $\frac{5^x}{\log_e 5}$ (D) $\frac{5^x}{(\log_e 5)^2}$

Q13 अवकल समीकरण $\left(1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}=k\frac{d^2y}{dx^2}$ की घात है:

(A) 1 (B) 2

(C) 3 (D) $\frac{3}{2}$

Q14 $\int \frac{\pi}{x^{n+1}-x}dx=$

(A) $\frac{\pi}{n}\log_e\left|\frac{x^n-1}{x^n}\right|+C$

(B) $\log_e\left|\frac{x^n+1}{x^n-1}\right|+C$

(C) $\frac{\pi}{n}\log_e\left|\frac{x^n+1}{x^n}\right|+C$

(D) $\pi\log_e\left|\frac{x^n}{x^n-1}\right|+C$

Q15 $\int_0^1 \frac{a-bx^2}{\left(a+bx^2\right)^2}dx$ का मान है:

(A) $\frac{a-b}{a+b}$ (B) $\frac{1}{a-b}$

(C) $\frac{a+b}{2}$ (D) $\frac{1}{a+b}$

Q16 प्रत्येक सदिश $\vec{a}+\vec{b}$ और $\vec{a}-\vec{b}$ के लंबवत मात्रक सदिश, जहाँ $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ और $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ है, है:

(A) $\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i}+\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{j}+\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}$

(B) $-\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{j}-\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}$

(C) $-\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i}+\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{j}+\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{k}$

(D) $-\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i}+\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{j}-\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}$

Q17 मान लीजिए कि X एक यादृच्छिक रूप से चुने गए दिन के दौरान आपके खेलने के घंटों की संख्या को दर्शाता है। X द्वारा मान x लेने की प्रायिकता का रूप निम्नलिखित है, जहाँ c एक स्थिरांक है।

$$P(X=x)=\begin{cases}0.1, & \text{if } x=0\\ cx, & \text{if } x=1 \text{ or } x=2\\ c(5-x), & \text{if } x=3 \text{ or } x=4\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

सूची-I का सूची-II के साथ मिलान करें

सूची-I	सूची-II
(A) c	(I) 0.75
(B) $P(X\le 2)$	(II) 0.3
(C) $P(X=2)$	(III) 0.55
(D) $P(X\ge 2)$	(IV) 0.15

(A) (A) - (I), (B) - (II), (C) - (III), (D) - (IV)

(B) (A) - (IV), (B) - (III), (C) - (II), (D) - (I)

(C) (A) - (I), (B) - (II), (C) - (IV), (D) - (III)

(D) (A) - (III), (B) - (IV), (C) - (I), (D) - (II)

Q18 यदि $\sin y=x\sin(a+y)$, तो $\frac{dy}{dx}$ है

(A) $\frac{\sin^2 a}{\sin(a+y)}$

(B) $\frac{\sin(a+y)}{\sin^2 a}$

(C) $\frac{\sin(a+y)}{\sin a}$

(D) $\frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$

Q19 रेखाओं $\vec{r}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}+\lambda\cdot\left(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}\right)$ और $\vec{r}=3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}+\mu\left(4\hat{i}+6\hat{j}+12\hat{k}\right)$ के बीच की दूरी है:

(A) $\frac{\sqrt{28}}{7}$ (B) $\frac{\sqrt{199}}{7}$

(C) $\frac{\sqrt{328}}{7}$ (D) $\frac{\sqrt{421}}{7}$

Q20 यदि $f(x)=2\left(\tan^{-1}(e^x)-\frac{\pi}{4}\right)$ है, तो $f(x)$ है:

(A) सम फलन (even) तथा $(0,\infty)$ में पूर्णतः वर्धमान

(B) सम फलन (even) तथा $(0,\infty)$ में पूर्णतः अवरोही

(C) विषम फलन (odd) तथा $(-\infty,\infty)$ में पूर्णतः वर्धमान

(D) विषम फलन (odd) तथा $(-\infty,\infty)$ में पूर्णतः अवरोही

Q21 दिए गए अवकल समीकरण $\left(x\log_e x\right)dy = \left(\log_e x - y\right)dx$ के लिए निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिए:

(A) दिए गए अवकल समीकरण की कोटि (Degree) 1 है।

(B) यह एक समघाती (Homogeneous) अवकल समीकरण है।

(C) इसका हल $2y\log_e x + A = \left(\log_e x\right)^2$ है, जहाँ A एक स्वेच्छ अचर है।

(D) इसका हल $2y\log_e x + A = \log_e\left(\log_e x\right)$ है, जहाँ A एक स्वेच्छ अचर है|

(A) केवल (A) और (C)

(B) केवल (A), (B) और (C)

(C) केवल (A), (B) और (D)

(D) केवल (A) और (D)

Q22 दो थैले हैं। थैले-1 में 4 सफ़ेद और 6 काली गेंदें हैं तथा थैले-2 में 5 सफ़ेद और 5 काली गेंदें हैं। एक पासा फेंका जाता है, यदि यह 3 से विभाज्य संख्या दर्शाता है, तो थैले-1 से एक गेंद निकाली जाती है, अन्यथा थैले-2 से एक गेंद निकाली जाती है। यदि निकाली गई गेंद काले रंग की नहीं है, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि यह थैले-2 से नहीं निकाली गई है:

(A) $\frac{4}{9}$ (B) $\frac{3}{8}$

(C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{4}{19}$

Q23 निम्नलिखित में से कौन-सा सरल रेखा $\frac{x-3}{2} = \frac{2-y}{3} = \frac{z+4}{-1}$ का दिक-अनुपात नहीं हो सकता है?

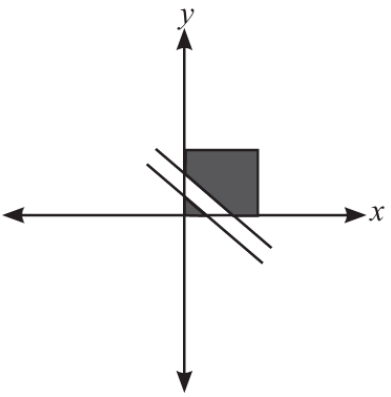
(A) $2, -3, -1$ (B) $-2, 3, 1$

(C) $2, 3, -1$ (D) $6, -9, -3$

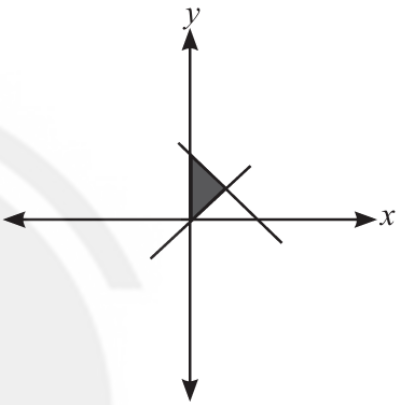
Q24 निम्नलिखित में से कौन-सा एक, LPP के निम्नलिखित बाधाओं द्वारा निर्धारित सही सुसंगत क्षेत्र का प्रतिनिधित्व करता है?

$x + y \geq 10, 2x + 2y \leq 25, x \geq 0, y \geq 0$

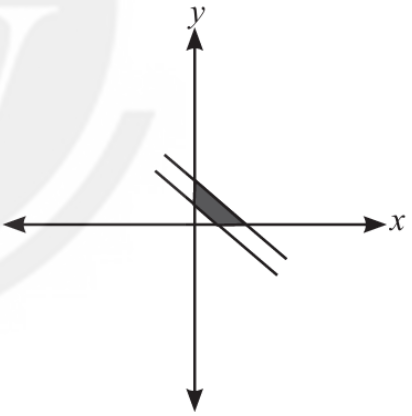
(A)



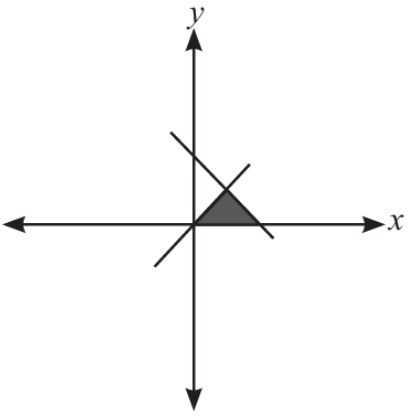
(B)



(C)



(D)



Q25 माना कि R किसी तल में सभी सरल रेखाओं के समुच्चय A पर ऐसा संबंध है जिससे $l_1 \mathrm{R}\, l_2 \Leftrightarrow l_1,\ l_2$ के समांतर है। तब R है:

(A) सममित

(B) एक तुल्यता संबंध

(C) संक्रामक

(D) स्वतुल्य

Q26 एक लीप वर्ष में 53 मंगलवार न आने की प्रायिकता कितनी होगी?

(A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{1}{7}$

(C) 0 (D) $\frac{5}{7}$

Q27 दो रेखाओं के बीच का कोण जिनके दिक् अनुपात $1, 1, -2$ और $\left(\sqrt{3}-1\right), \left(-\sqrt{3}-1\right), -4$ के समानुपाती हैं:

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) π

(C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

Q28 If $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=27$ and $\left|\vec{a}\right|=2\left|\vec{b}\right|$, then $\left|\vec{b}\right|$ is :

(A) 3 (B) 2

(C) $\frac{5}{6}$ (D) 6

Q29 यदि $\tan^{-1}\left(\frac{2}{3^{-x}+1}\right)=\cot^{-1}\left(\frac{3}{3^{x}+1}\right)$ है, तो निम्नलिखित में से कौन-सा सत्य है?

(A) उपर्युक्त समीकरण को संतुष्ट करने वाला x का कोई वास्तविक मान नहीं है।

(B) उपर्युक्त समीकरण को संतुष्ट करने वाला x का एक धनात्मक और एक ऋणात्मक वास्तविक मान है।

(C) उपर्युक्त समीकरण को संतुष्ट करने वाले x के दो वास्तविक धनात्मक मान हैं।

(D) उपर्युक्त समीकरण को संतुष्ट करने वाले x के दो वास्तविक ऋणात्मक मान हैं।

Q30 यदि A, B और C तीन अव्युत्क्रमणीय आव्यूह हैं जो $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 3 & 2a\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3b & 5\\ a & 2\end{bmatrix}$ और $C=\begin{bmatrix}a+b+c & c+1\\ a+c & c\end{bmatrix}$ द्वारा दिए गए हैं, तो abc का मान है:

(A) 15 (B) 30

(C) 45 (D) 90

Q31 समाकलन का मान $\int_{\log_e 2}^{\log_e 3}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$ है

(A) $\log_e 3$ (B) $\log_e 4-\log_e 3$

(C) $\log_e 9-\log_e 4$ (D) $\log_e 3-\log_e 2$

Q32 यदि $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ तीन सदिश इस प्रकार हैं कि $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, जहाँ $\vec{a}$ और $\vec{b}$ मात्रक सदिश हैं और $\left|\vec{c}\right|=2$ है, तो सदिशों $\vec{b}$ और $\vec{c}$ के बीच का कोण है:

(A) 60° (B) 90°

(C) 120° (D) 180°

Q33 मान लें कि $[x]$ महत्तम पूर्णांक फलन (Greatest Integer Function) को दर्शाता है।

तब सूची–I का सूची–II से मिलान कीजिए:

सूची–I	सूची–II
(A) $\lvert x-1\rvert+\lvert x-2\rvert$	(I) x=0 को छोड़कर सर्वत्र अवकलनीय है।
(B) $x-\lvert x\rvert$	(II) सर्वत्र सतत है।
(C) $x-[x]$	(III) x=1 पर अवकलनीय नहीं है।
(D) $x\lvert x\rvert$	(IV) x=1 पर अवकलनीय है।

नीचे दिए गए विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

(A) (A) - (I), (B) - (II), (C) - (III), (D) - (IV)

(B) (A) - (I), (B) - (III), (C) - (II), (D) - (IV)

(C) (A) - (II), (B) - (I), (C) - (III), (D) - (IV)

(D) (A) - (II), (B) - (IV), (C) - (III), (D) - (I)

Q34 त्रिज्या r के सापेक्ष एक अर्धगोले (hemisphere) के कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर $(\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$ में, जब $r=\sqrt[3]{1.33}$ cm हो, ज्ञात कीजिए:

(A) 66π (B) 6.6π

(C) 3.3π (D) 4.4π

Q35 रेखाओं

$$\frac{x}{7\sqrt{3}\,a}+\frac{y}{b}=4,\quad x=0 \quad \text{और} \quad y=0$$

द्वारा आबद्ध क्षेत्र का **क्षेत्रफल** है:

(A) $56\sqrt{3}ab$ (B) $56a$

(C) $ab/2$ (D) $3ab$

Q36 यदि A एक वर्ग आव्यूह है और I इकाई आव्यूह है, ऐसे कि $A^2 = A$, तो $A(I - 2A)^3 + 2A^3$ बराबर होगा:

(A) $I + A$ (B) $I + 2A$

(C) $I - A$ (D) A

Q37 सूची-I का सूची-II से मिलान करें

सूची-I	सूची-II
(A) $xdy - (y + 2x^2)dx = 0$ का समाकलन गुणक	(I) $\frac{1}{x}$
(B) $(2x^2 - 3y)dx = xdy$ का समाकलन गुणक	(II) x
(C) $(2y + 3x^2)dx + xdy = 0$ का समाकलन गुणक	(III) x^2
(D) $2xdy + (3x^2 + 2y)dx = 0$ का समाकलन गुणक	(IV) x^3

(A) (A) - (I), (B) - (III), (C) - (IV), (D) - (II)

(B) (A) - (I), (B) - (IV), (C) - (III), (D) - (II)

(C) (A) - (II), (B) - (I), (C) - (III), (D) - (IV)

(D) (A) - (III), (B) - (IV), (C) - (II), (D) - (I)

Q38 यदि फलन f : → को

$$f(n) = \begin{cases} n-1, & \text{यदि } n \text{ सम हो} \\ n+1, & \text{यदि } n \text{ विषम हो} \end{cases}$$

के रूप में परिभाषित किया जाता है, तो

(A) f एकेक है

(B) f अंत:क्षेपी है

(C) f आच्छादी है

(D) f व्युत्क्रमणीय है

नीचे दिए गए विकल्पों में से सही उत्तर का चयन कीजिए:

(A) केवल (B)

(B) केवल (A), (B) और (D)

(C) केवल (A) और (C)

(D) केवल (A), (C) और (D)

Q39 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cot x}{\text{cosec } x+\cos x} dx =$

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{4}$

(C) ∞ (D) $\frac{\pi}{12}$

Q40 यदि यादृच्छिक चर का निम्नलिखित प्रायिकता वितरण है:

X	0	1	2	Otherwise
P(X)	k	2k	3k	0

सूची–I का सूची–II से मिलान कीजिए :

सूची–I	**सूची–II**
(A) k	(I) $\frac{5}{6}$
(B) $P(X < 2)$	(II) $\frac{4}{3}$
(C) $E(X)$	(III) $\frac{1}{2}$
(D) $P(1 \le X \le 2)$	(IV) $\frac{1}{6}$

नीचे दिए गए विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए:

(A) (A) - (I), (B) - (II), (C) - (III), (D) - (IV)

(B) (A) - (IV), (B) - (III), (C) - (II), (D) - (I)

(C) (A) - (I), (B) - (II), (C) - (IV), (D) - (III)

(D) (A) - (III), (B) - (IV), (C) - (I), (D) - (II)

Q41 एक वर्ग आव्यूह $A_{n\times n}$ के लिए

(A) $|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$

(B) $|A| = |\text{adj } A|^{n-1}$

(C) $A|\text{adj } A| = |A|$

(D) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

नीचे दिए गए विकल्पों में से सही उत्तर चुनें :

(A) केवल (B) और (D)

(B) केवल (A) और (D)

(C) केवल (A),(C) और (D)

(D) केवल (B), (C) और (D)

Q42 आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ एक है:

(A) अदिश आव्यूह

(B) विकर्ण आव्यूह

(C) विषम-सममित आव्यूह

(D) सममित आव्यूह

नीचे दिए गए विकल्पों में से सही उत्तर चुनें:

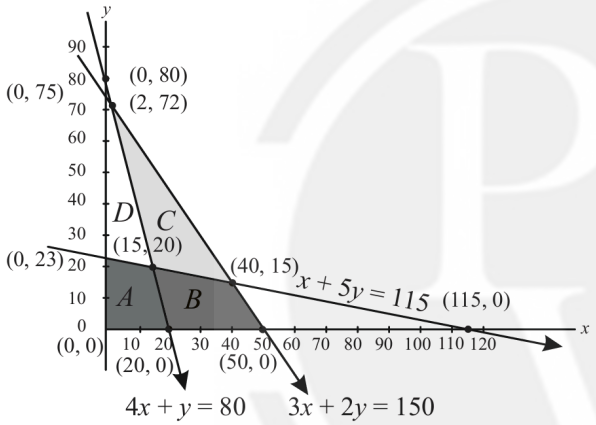
(A) केवल (A), (B) और (D)

(B) केवल (A), (B) और (C)

(C) (A), (B), (C) और (D)

(D) केवल (B), (C) और (D)

Q43 LPP की व्यवरोधों $4x + y \geq 80$, $x + 5y \geq 115, 3x + 2y \leq 150, x, y \geq 0$ द्वारा दर्शाया गया सुसंगत क्षेत्र है



(A) क्षेत्र A (B) क्षेत्र B

(C) क्षेत्र C (D) क्षेत्र D

Q44 वक्रों $4x^2 = y$ और $y = 4$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है:

(A) 16 वर्ग इकाई (B) $\frac{32}{3}$ वर्ग इकाई

(C) $\frac{8}{3}$ वर्ग इकाई (D) $\frac{16}{3}$ वर्ग इकाई

Q45 $\int e^x \left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x}} \right) dx =$

(A) $\frac{1}{2\sqrt{x}} e^x + C$ (B) $-e^x \sqrt{x} + C$

(C) $-\frac{1}{2\sqrt{x}} e^x + C$ (D) $e^x \sqrt{x} + C$

Q46 यदि $f(x)$, जो कि $f(x) = \begin{cases} kx + 1, & \text{if } x \leq \pi \\ \cos x, & \text{if } x > \pi \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है, $x = \pi$ पर संतत है, तो k का मान है:

(A) 0 (B) π

(C) $\frac{2}{\pi}$ (D) $\frac{-2}{\pi}$

Q47 यदि $P = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ और $Q = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ दो आव्यूह हो, तो $(PQ)'$ है

(A) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 7 & 6 & 7 \\ -9 & -7 & 0 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 7 \\ -8 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

Q48 $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 1 \\ -\cos x & 1 & \cos x \\ -1 & -\cos x & 1 \end{vmatrix}$

नीचे दिए गए विकल्पों में से सही उत्तर चुनें:

(A) $\Delta = 2\left(1 - \cos^2 x\right)$

(B) $\Delta = 2\left(2 - \sin^2 x\right)$

(C) Δ का न्यूनतम मान 2 है

(D) Δ का अधिकतम मान 4 है

(A) केवल (A), (C) और (D)

(B) केवल (A), (B) और (C)

(C) (A), (B), (C) और (D)

(D) केवल (B), (C) और (D)

Q49 $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x, \; x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(A) $f'(x) = \cos x - \sin 2x$

(B) फलन के क्रांतिक बिंदु $x = \frac{\pi}{6}$ और $x = \frac{\pi}{2}$ हैं।

(C) फलन का न्यूनतम मान 2 है।

(D) फलन का अधिकतम मान $\frac{3}{4}$ है।

नीचे दिए गए विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए:

(A) केवल (A), (B) और (D)

(B) केवल (A), (B) और (C)

(C) (A), (B), (C) और (D)

(D) केवल (B), (C) और (D)

Q50 उस रेखा के **दिशा कोसाइन** ज्ञात कीजिए, जो उन रेखाओं के **लंबवत** है, जिनके **दिशा अनुपात** क्रमशः
$1, -2, -2$ तथा $0, 2, 1$ हैं:

(A) $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

(B) $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

(C) $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$

(D) $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

Answer Key

Q1	B
Q2	D
Q3	D
Q4	B
Q5	A
Q6	C
Q7	B
Q8	B
Q9	C
Q10	B
Q11	D
Q12	D
Q13	B
Q14	A
Q15	D
Q16	D
Q17	B
Q18	D
Q19	C
Q20	C
Q21	A
Q22	C
Q23	C
Q24	C
Q25	B
Q26	D
Q27	A
Q28	A
Q29	B
Q30	C
Q31	B
Q32	D
Q33	C
Q34	B
Q35	A
Q36	D
Q37	B
Q38	D
Q39	A
Q40	B
Q41	B
Q42	A
Q43	C
Q44	D
Q45	D
Q46	D
Q47	B
Q48	D
Q49	A
Q50	A

Hints & Solutions

Note: scan the QR code to watch video solution

Q1 Text Solution:

दिया गया उद्देशय फलन, $Z = ax + by, a \geq 0, b \geq 0$ तथा $ab = 25$ है

जो बिन्दुओं $(8, 2)$ और $(4, 6)$ पर अधिकतम है।

प्रश्न के अनुसार

$\Rightarrow (Z)_{(8,2)} = (Z)_{(4,6)}$

$\Rightarrow a(8) + b(2) = a(4) + b(6)$

$\Rightarrow 4a = 4b$

$\Rightarrow a = b$

और

$ab = 25$

$\Rightarrow a(a) = 25$

$\Rightarrow a^2 = 25$

$\Rightarrow a = \pm 5$

समीकरण (i) से, $b = \pm 5$

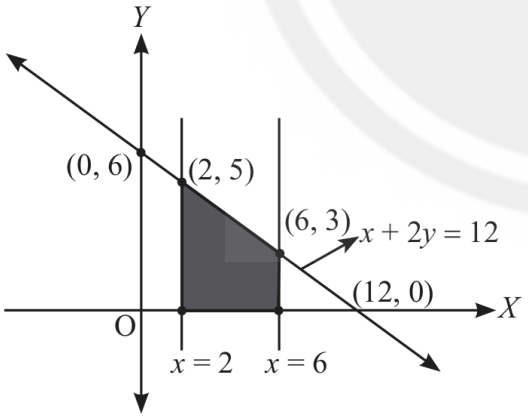
$a > 0, b > 0 \Rightarrow a = 5, b = 5$

$Z_{\max} = 5(8) + 5(2)$

$\Rightarrow Z_{\max} = 50$

Q2 Text Solution:

दिया है: रेखाएं $x + 2y = 12, x = 2, x = 6$ और x -अक्ष



⇒घिरे हुए क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \int_{x_1}^{x_2} y dx$

⇒घिरे हुए क्षेत्र का क्षेत्रफल= $\int_2^6 \left(\frac{12-x}{2}\right) dx$

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - 12x\right)_2^6$

$= -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{6^2}{2} - 12 \times 6\right) - \left(\frac{2^2}{2} - 12 \times 2\right)\right]$

$= -\frac{1}{2}[-54 + 22]$

$= 16$ वर्ग इकाई

Q3 Text Solution:

पहली बार पाँसा फेंकने पर,

$x > 4 \Rightarrow 5, 6$

$\Rightarrow P_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

दूसरी बार पाँसा फेंकने पर,

$x > 4 \Rightarrow 5, 6$

$\Rightarrow P_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

तीसरी बार पाँसा फेंकने पर,

$x < 4 \Rightarrow 1, 2, 3$

$\Rightarrow P_3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ये घटनाएँ स्वतंत्र हैं

$P = P_1 \times P_2 \times P_3$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$

$\Rightarrow P = \frac{1}{18}$

Q4 Text Solution:

दिया गया है, उद्देश्य फलन $Z = ax + by$ का अधिकतम मान खंड AB पर है।

बिंदु A(0,8) और बिंदु B(4,0)

$Z_A = Z_B$ (अधिकतम मान)

$\Rightarrow a(0) + b(8) = a(4) + b(0)$

$\Rightarrow 8b = 4a$

$\Rightarrow a = 2b$

Q5 Text Solution:

दिया है: $t = e^{2x}, y = \log_e t^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\log_e t^2\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(e^{2x}\right)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{t^2} \cdot 2t \cdot e^{2x} \cdot 2$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4e^{2x}}{t}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4e^{2x}}{e^{2x}}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 0$

Q6 Text Solution:

दिया गया है कि और सममित आव्यूह हैं।

$A^T = A$ and $B^T = B$

माना, $M = AB - BA$

$\Rightarrow M^T = (AB - BA)^T$

$\Rightarrow M^T = (AB)^T - (BA)^T$

$\Rightarrow M^T = B^T A^T - A^T B^T$

$\Rightarrow M^T = BA - AB$

$\Rightarrow M^T = -M$

$\therefore (AB - BA)$ एक विषम-सममित आव्यूह है।

अतः, विकल्प (C) सही विकल्प है।

Q7 Text Solution:

दिया है, $A = [A]_{4\times4}, |A| = 4$

$|2A|$

$= 2^4|A|$

$= 2^4 \times 4$

$= 64$

$\Rightarrow |2A| = 64$

Q8 Text Solution:

$[A]_{3\times2}[B]_{x\times y} = [C]_{3\times1}$

आव्यूह (matrices) A और B के गुणन (multiplication) के लिए, B की पंक्तियों (rows) की संख्या, A के स्तंभों (columns) की संख्या के बराबर होनी चाहिए।

$\Rightarrow x = 2$

$[A]_{3\times2} \cdot [B]_{x\times y} = [C]_{3\times1}$

$\Rightarrow [C]_{3\times y} = [C]_{3\times1}$

$\Rightarrow y = 1$

अतः, $x = 2$ and $y = 1$.

Q9 Text Solution:

फलन $f(x) = x^2 + bx + 1$,अंतराल $[1, 2]$ में वर्धमान होगा यदि $f'(x) \geq 0$;

$f'(x) = 2x + b$

$f'(x) \geq 0$

$f'(1) \geq 0$

$\Rightarrow 2 + b \geq 0$

$\Rightarrow b \geq -2 \ \ldots\ldots (i)$

$f'(2) \geq 0$

$\Rightarrow 4 + b \geq 0$

$\Rightarrow b \geq -4 \ \ldots\ldots (ii)$

समीकरण (i) और (ii) से, उभयनिष्ठ क्षेत्र $b \geq -2$ है:

अतः b का न्यूनतम मान -2 है|

Q10 Text Solution:

जब दो पासे एक साथ फेंके जाते है, तो X चार की संख्या को दर्शाता है।

$P(X = 0) = P(\overline{4})P(\overline{4})$

$= (1 - \frac{1}{6}) \times (1 - \frac{1}{6})$

$= \frac{25}{36}$

$P(X = 1) = P(\overline{4})P(4) + P(4)P(\overline{4})$

$= \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$

$= \frac{10}{36}$

$P(X = 2) = P(4)P(4)$

$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$

$= \frac{1}{36}$

X	0	1	2
P(X)	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

$\therefore E(X) = \sum X_i P(X_i)$

$= 0 \times \frac{25}{36} + \frac{1\times10}{36} + 2 \times \frac{1}{36} = \frac{12}{36}$

$\Rightarrow E(X) = \frac{1}{3}$

Q11 Text Solution:

दिया गया फलन, $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$

$x \in [0, 3]$

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

$f'(x) = 6(x^2 - 3x + 2)$

$\Rightarrow f'(x) = 6(x - 1)(x - 2)$

उच्चतम और निम्नतम के लिए

$\Rightarrow f'(x) = 0$

$\Rightarrow 6(x - 1)(x - 2) = 0$

$\Rightarrow x = 1, x = 2$

$f(0) = 2(0)^3 - 9(0)^2 + 12 \times 0 - 5$

$\Rightarrow f(0) = -5$ (निरपेक्ष निम्नतम)

$f(1) = 2(1)^3 - 9(1)^2 + 12 \times 1 - 5 = 0$

$f(1) = 0$

$f(2) = 2(2)^3 - 9(2)^2 + 12 \times 2 - 5$

$f(2) = -1$

$f(3) = 2(3)^3 - 9(3)^2 + 12 \times 3 - 5$

$f(3) = 4$ (निरपेक्ष निम्नतम)

उच्चतम बिंदु, $x = 3$

निम्नतम बिंदु, $x = 0$

(A) - (IV), (B) - (III), (C) - (I), (D) - (II)

Q12 Text Solution:

$\frac{d^2y}{dx^2} = 5^x$

$\Rightarrow d\left(\frac{dy}{dx}\right) = 5^x dx$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$\Rightarrow \int d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int 5^x dx$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{5^x}{\log_e 5} + C$

$\Rightarrow dy = \frac{5^x}{\log_e 5} dx + C$

पुनः समाकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$\Rightarrow \int dy = \int \frac{5^x}{\log_e 5} dx + C$

$\Rightarrow y = \frac{5^x}{(\log_e 5)^2}$

Q13 Text Solution:

दिया गया, अवकल समीकरण है:

$\left(1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2} = k\frac{d^2y}{dx^2}$

दोनों तरफ वर्ग करने पर, हमें प्राप्त होता है

$\Rightarrow \left[1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 = k^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$

डिग्री उच्चतम अवकल की उच्चतम घात है।

$\therefore$ घात$= 2$

Q14 Text Solution:

माना, $I = \int \frac{\pi}{x^{n+1} - x} dx$

$I = \pi \int \frac{dx}{x(x^n - 1)}$

$z = x^n - 1$

$\Rightarrow dz = nx^{n-1} dx$

$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dz}{n(z+1)}$

$I = \pi \int \frac{dz}{nz \cdot (z+1)}$

$I = \frac{\pi}{n} \int \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right) dz$

$\Rightarrow I = \frac{\pi}{n}\left[\log_e |z| - \log_e |(z+1)|\right] + C$

$\Rightarrow I = \frac{\pi}{n}\left[\log_e |(x^n - 1)| - \log_e |x^n|\right] + C$

$\Rightarrow I = \frac{\pi}{n} \log_e \left|\frac{(x^n - 1)}{x^n}\right| + C$

Q15 Text Solution:

माना $I = \int_0^1 \frac{a - bx^2}{(a + bx^2)^2} dx$

$x = \sqrt{\frac{a}{b}} \tan\theta$ रखने पर

$\Rightarrow dx = \sqrt{\frac{a}{b}} \sec^2\theta d\theta$

$I = \int_0^1 \frac{a - b\left(\frac{a}{b}\right)\tan^2\theta}{\left[a + b\left(\frac{a}{b}\right)\tan^2\theta\right]^2} \sqrt{\frac{a}{b}} \sec^2\theta d\theta$

$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{a(1 - \tan^2\theta)}{a^2(1 + \tan^2\theta)^2} \sqrt{\frac{a}{b}} (1 + \tan^2\theta) d\theta$

$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a}{b}} \cos 2\theta d\theta$

$\left\{\because \cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta}\right\}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{ab}}\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^1$

$\Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{ab}}\left[\sin 2\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)\right]_0^1$

$\Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{ab}}\left[\sin 2\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{b}{a}}\right) - 0\right]$

$\Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{ab}}\left[\sin 2\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right]$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \sin\sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{\frac{b}{a}}}{1 + \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2}\right)$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \times \frac{2\sqrt{ba}}{a+b}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{a+b}$

Q16 Text Solution:

$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, \vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{a} + \vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{a} - \vec{b} = -\hat{j} - 2\hat{k}$

$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$

$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

$= -2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$

$$\hat{n}=\frac{(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})}{\left|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})\right|}$$

$$\hat{n}=\frac{-2\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}}{\sqrt{(-2)^2+(4)^2+(-2)^2}}$$

$$\hat{n}=\frac{-2\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}}{2\sqrt{6}}$$

$$\hat{n}=\frac{-\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \hat{n}=\frac{-\hat{i}}{\sqrt{6}}+\frac{2\hat{j}}{\sqrt{6}}-\frac{\hat{k}}{\sqrt{6}}$$

अतः अंतिम उत्तर विकल्प D है।

Q17 Text Solution:

दिया है;

$$P(X=x)=\begin{cases}0.1, & \text{if } x=0\\ cx, & \text{if } x=1 \text{ or } x=2\\ c(5-x), & \text{if } x=3 \text{ or } x=4\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

x	0	1	2	3	4
$P(X)$	0.1	c	$2c$	$2c$	c

$$\Rightarrow \sum P(x_i)=1$$

$$\Rightarrow 0.1+c+2c+2c+c=1$$

$$\Rightarrow c=\frac{0.9}{6}=0.15$$

$$P(X=2)=2c=2\times 0.15=0.3$$

$$P(X\le 2)=P(0)+P(1)+P(2)$$

$$=0.1+3\times 0.15$$

$$=0.55$$

$$P(X\ge 2)=P(2)+P(3)+P(4)$$

$$=5\times 0.15=0.75$$

∴ (A) - (IV), (B) - (III), (C) - (II), (D) - (I)

Q18 Text Solution:

दिया है, $\sin y=x\sin(a+y)$

$$\Rightarrow x=\frac{\sin y}{\sin(a+y)}$$

y के सापेक्ष अवकलन पर

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{\sin(a+y)\cos y-\sin y\cos(a+y)}{\sin^2(a+y)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{\sin(a+y-y)}{\sin^2(a+y)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$$

Q19 Text Solution:

दिया गया है:

$$L_1:\vec{r}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$$

$$L_2:\vec{r}=3\hat{i}-2\hat{j}+1\hat{k}+\mu(4\hat{i}+6\hat{j}+12\hat{k})$$

रेखाएँ L_1 और L_2 समांतर हैं।

$$D=\frac{\left|\vec{b}\times(\vec{a_2}-\vec{a_1})\right|}{\left|\vec{b}\right|}$$

$$a_1=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}, a_2=3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k},$$

$$\vec{b}=2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}$$

$$\vec{b}\times(\vec{a}_2-\vec{a}_1)=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\2&3&6\\2&0&-2\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{b}\times(\vec{a}_2-\vec{a_1})=-6\hat{i}+16\hat{j}-6\hat{k}$$

$$D=\frac{\sqrt{(-6)^2+(16)^2+(-6)^2}}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=\frac{\sqrt{328}}{7}$$

Q20 Text Solution:

दिया गया फलन है: $f(x)=2\left(\tan^{-1}e^x-\frac{\pi}{4}\right)$

$$f(-x)=2\left(\tan^{-1}e^{-x}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2\left(\tan^{-1}\frac{1}{e^x}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2\left(\cot^{-1}e^x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}(e^x)-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2\left(\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}(e^x)\right)$$

$$=-f(x)$$

अतः यह एक विषम फलन है|

$$\Rightarrow f'(x)=\left[\frac{2e^x}{1+(e^x)^2}-0\right]$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2e^x}{1+e^{2x}}>0$$

$$\Rightarrow x\in R \text{ or } (-\infty,\infty)$$

अतः फलन, अंतराल $(-\infty,\infty)$ में पूर्णतः वर्धमान होगा|

Q21 Text Solution:

दिया गया अवकल समीकरण है:

$$(x\log_e x)\,dy=(\log_e x-y)\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{y}{x\log x}=\frac{1}{x}$$

घात $=1$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + Py = Q$

$P = \frac{1}{x \log_e x}, Q = \frac{1}{x}$

$\text{IF} = e^{\int P dx}$

$= e^{\int \frac{1}{x \log_e x} dx}$

$= e^{\log_e (\log_e x)}$

$= \log_e x$

अब, हल

$\Rightarrow y(\text{IF}) = \int Q(\text{IF}) dx + c$

$\Rightarrow y(\log_e x) = \int \frac{1}{x} \log_e x dx + c$

$\Rightarrow y(\log_e x) = \frac{(\log_e x)^2}{2} + c$

$\Rightarrow 2y \log_e x + A = (\log_e x)^2$

Q22 Text Solution:

थैले-1: 4 W, 6 B

थैले-2: 5W, 5B

मान लीजिए E_1 थैला 1 चुनने की घटना है, संख्या 3 से विभाज्य है।

$P(E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

E_2 थैला 2 चुनने की घटना है, संख्या 3 से विभाज्य नहीं है।

$P(E_2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

E सफेद गेंद निकालने की घटना है।

$P\left(\frac{E_1}{E}\right) = \frac{P(E_1) \times P\left(\frac{E}{E_1}\right)}{P(E_1) \times P\left(\frac{E}{E_1}\right) + P(E_2) \times P\left(\frac{E}{E_2}\right)}$

$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{4}{10}}{\frac{1}{3} \times \frac{4}{10} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{10}} = \frac{\frac{4}{30}}{\frac{14}{30}}$

$\Rightarrow P\left(\frac{E_1}{E}\right) = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$

Q23 Text Solution:

प्रदत्त रेखा $\frac{x-3}{2} = \frac{2-y}{3} = \frac{z+4}{-1}$

$\Rightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+4}{-1}$

दिक-अनुपात हैं: $2, -3, -1$ or $-2, +3, +1$ or $6, -9, -3$

Q24 Text Solution:

$x + y \geq 10$

$\frac{x}{10} + \frac{y}{10} \geq 1$

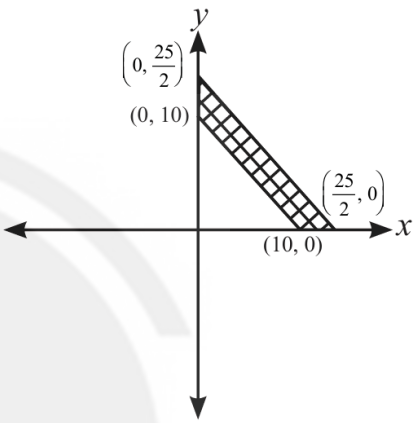
अतः मूल बिंदु से दूर रेखा $x + y = 10$ के ऊपर का क्षेत्र सम्मिलित है।

$2x + 2y \leq 25$

$\Rightarrow \frac{x}{25/2} + \frac{y}{25/2} \leq 1$

अतः रेखा 2x+2y=25 से ऊपर मूल बिंदु की ओर का क्षेत्र सम्मिलित है,

साथ ही, $x \geq 0, \ y \geq 0$, इसलिए सामान्य क्षेत्र के लिए ग्राफ इस प्रकार खींचा जा सकता है



Q25 Text Solution:

स्वतुल्य:

कोई भी रेखा l स्वयं के समांतर होती है। अतः R स्वतुल्य है।

सममित:

यदि l_1, l_2 के समांतर है, तो l_2, l_1 के समांतर होगा। अतः R सममित होगा।

संक्रामक:

यदि l_1, l_2 के समांतर है और l_2, l_3 के समांतर है, तो l_1, l_3 के समांतर होगा। अतः R संक्रामक होगा।

$\therefore R$ एक तुल्यता संबंध है।

Q26 Text Solution:

एक लीप वर्ष में कुल 366 दिन होते हैं। $= 52$ सप्ताह $+2$ दिन

ये 2 अतिरिक्त दिन निम्नलिखित संयोजनों में हो सकते हैं:

$MT, TW, WTh, ThF, FSa, SaS, SM$

$\Rightarrow n(S) = 7$

मान लीजिए कि E उस घटना को दर्शाता है जिसमें मंगलवार नहीं आता : $n(E) = 5$

प्रायिकता, $P\left(E\right) = \frac{n(E)}{n(S)}$

$\Rightarrow P\left(E\right) = \frac{5}{7}$

Q27 Text Solution:

$L_1 : 1, 1, -2$ के दिक् अनुपात,

L_2 के दिक् अनुपात : $\left(\sqrt{3}-1\right), \left(-\sqrt{3}-1\right), -4$

$\cos\theta = \frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$

$\Rightarrow \cos\theta$

$= \frac{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1+8}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{3+1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}+16}}$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{24}} = \frac{6}{2\times6} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

Q28 Text Solution:

दिया गया है, $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = 27$ और $\left|\vec{a}\right| = 2\left|\vec{b}\right|$

$\Rightarrow \left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = 27$

$\Rightarrow \left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{b}\right|^2 = 27$

$\Rightarrow \left(2\left|\vec{b}\right|\right)^2 - \left|\vec{b}\right|^2 = 27$

$\Rightarrow 3\left|\vec{b}\right|^2 = 27$

$\Rightarrow \left|\vec{b}\right| = 3$

Q29 Text Solution:

$\tan^{-1}\left(\frac{2}{3^{-x}+1}\right) = \cot^{-1}\left(\frac{3}{3^x+1}\right)$

$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{2}{3^{-x}+1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3^x+1}{3}\right)$

$\Rightarrow \frac{2}{3^{-x}+1} = \frac{3^x+1}{3}$

$\Rightarrow \frac{2(3^x)}{1+3^x} = \frac{3^x+1}{3}$

$z = 3^x$ रखने पर,

$\Rightarrow \frac{2z}{1+z} = \frac{z+1}{3}$

$\Rightarrow z^2 - 4z + 1 = 0$

$D = (-4)^2 - 4\times1\times1 = 12$

$\Rightarrow D > 0$ (दो भिन्न मूल)

$\Rightarrow z = 2 \pm \sqrt{3}$

बराबर करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$3^x = 2+\sqrt{3}; 3^x = 2-\sqrt{3}$

$\Rightarrow x = 1.19; x = -1.19$

Q30 Text Solution:

दिया गया: A, B और C अव्युत्क्रमणीय आव्यूह हैं।

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2a \end{bmatrix}$

$\Rightarrow |A| = 0$

$\Rightarrow 2a - 12 = 0$

$\Rightarrow a = 6$

$B = \begin{bmatrix} 3b & 5 \\ a & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow |B| = 0$

$\Rightarrow 6b - 5a = 0$

$\Rightarrow b = \frac{5a}{6}$

$\Rightarrow b = \frac{5}{6}\times6$

$\Rightarrow b = 5$

$C = \begin{bmatrix} a+b+c & c+1 \\ a+c & c \end{bmatrix}$

$R_1 \to R_1 - R_2$

$C = \begin{bmatrix} b & 1 \\ a+c & c \end{bmatrix}$

$\Rightarrow |C| = 0$

$\Rightarrow bc - a - c = 0$

$\Rightarrow 5c - 6 - c = 0$

$\Rightarrow 4c = 6$

$\Rightarrow c = \frac{3}{2}$

$\therefore abc = 6\times5\times\frac{3}{2} = 45$

Q31 Text Solution:

माना, $I = \int_{\log_{e^2}}^{\log_3 3} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$

$\Rightarrow I = \int_{\log_{e^2}}^{\log_3 3} \frac{e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)}{e^{-x}\left(e^{2x}+1\right)}dx$

$\Rightarrow I = \int_{\log_{e^2}}^{\log_3} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

$z = e^x + e^{-x}$ रखने पर

$\Rightarrow dz = \left(e^{x} - e^{-x}\right)dx$

$I = \int_{\log_e 2}^{\log_e 3} \frac{dz}{z}$

$\Rightarrow I = \left(\log_e z\right)_{\log_e 2}^{\log_e 3}$

$\Rightarrow I = \log_e\left(e^{x} + e^{-x}\right)\Big|_{\log_e 2}^{\log_e 3}$

$\Rightarrow I = \log_e\left(e^{\log_e 3} + e^{-\log_e 3}\right) - \log_e\left(e^{\log_e 2} + e^{-\log_e 2}\right)$

$\Rightarrow I = \log_e\left(3 + \frac{1}{3}\right) - \log_e\left(2 + \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow I = \log_e \frac{10}{3} - \log_e \frac{5}{2}$

$\Rightarrow I = \log_e\left(\frac{4}{3}\right)$

$\Rightarrow I = \log_e 4 - \log_e 3$

Q32 Text Solution:

दिया गया है, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0, \left|\vec{a}\right| = 1, \left|\vec{b}\right| = 1$

और $\left|\vec{c}\right| = 2$

$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$

$\Rightarrow \vec{b} + \vec{c} = -\vec{a}$

$\Rightarrow \left(\vec{b} + \vec{c}\right)^2 = \left(-\vec{a}\right)^2$

$\Rightarrow \left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{c}\right|^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c} = \left|\vec{a}\right|^2$

$\Rightarrow 1^2 + (2)^2 + 2|b||c|\cos\theta = 1^2$

$\Rightarrow 1 + 4 + 2 \times 1 \times 2 \times \cos\theta = 1$

$\Rightarrow \cos\theta = -1$

$\Rightarrow \cos\theta = \cos 180^\circ$

$\Rightarrow \theta = 180^\circ$

Q33 Text Solution:

(A) $|x-1| + |x-2|$

यह फलन सर्वत्र सतत है, लेकिन x=1 तथा x=2 पर अवकलनीय नहीं है।

(B) $x - |x|$

- For $x \geq 0, |x| = x$

$\Rightarrow x - |x| = x - x = 0$

- For $x < 0, |x| = -x$

$\Rightarrow x - |x| = x - (-x) = 2x$

$x - |x|$, x=0 पर सतत है, लेकिन x=0 पर अवकलनीय नहीं है।

(C) x−[x], x का भिन्नात्मक भाग (fractional part) दर्शाता है, जो पूर्णांक बिंदुओं पर असतत होता है, अतः पूर्णांक बिंदुओं पर अवकलनीय नहीं होता।

इसलिए x=1 पर भी अवकलनीय नहीं है।

(D) $x|x|$

$f\left(x\right) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

x=0 पर सतत तथा अवकलनीय है।

∴ (A) - (II), (B) - (I), (C) - (III), (D) - (IV)

Q34 Text Solution:

दिया है: $r = \sqrt[3]{1.331}\ \text{cm} = 1.1\ \text{cm}$

अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $S = 3\pi r^2$

r के सापेक्ष अवकलन कीजिए,

$\frac{dS}{dr} = 3\pi(2r)$

$\Rightarrow \frac{dS}{dr}\Big|_{r=1.1} = 3\pi(2 \times 1.1)$

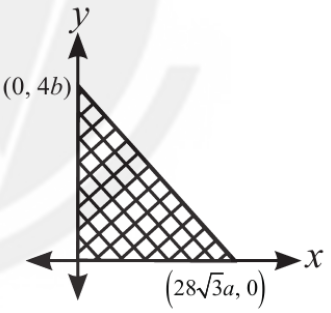
$\Rightarrow \frac{dS}{dr} = 6.6\pi$

Q35 Text Solution:

रेखाएँ $\frac{x}{7\sqrt{3}a} + \frac{y}{b} = 4, x = 0$ और $y = 0$

$\Rightarrow \frac{x}{7\sqrt{3}a} + \frac{y}{b} = 4$

$\Rightarrow \frac{x}{28\sqrt{3}a} + \frac{y}{4b} = 1$



छायांकइत भाग का क्षेत्रफल:

$A = \frac{1}{2} \times 28\sqrt{3}a \times 4b$

$A = 56\sqrt{3}ab$

Q36 Text Solution:

दिया है, $A^2 = A$, A एक वर्ग आव्यूह (square matrix) है और I एक तत्समक(इकाई) आव्यूह (identity matrix) है।"

$$A(I-2A)^3 + 2A^3$$
$$= A\left(I^3 - 8A^3 - 3I^2 \cdot 2A + 3I \cdot 4A^2\right) + 2A^2 \cdot A$$
$$= A(I - 8A - 6A + 12A) + 2A$$
$$= A(I - 2A) + 2A$$
$$= A - 2A^2 + 2A$$
$$= 3A - 2A$$
$$= A$$

Q37 Text Solution:

$$(A)\ xdy - \left(y + 2x^2\right)dx = 0$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 2x$$
$$\text{IF} = e^{\int \frac{-1}{x}dx} = e^{-\log_e x} = \frac{1}{x}$$

(A)– (I)

$$(B)\ \left(2x^2 - 3y\right)dx = xdy$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + 3\frac{y}{x} = 2x$$
$$\text{IF} = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\log_e x} = x^3$$

(B)– (IV)

$$(C)\ \left(2y + 3x^2\right)dx + xdy = 0$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = -3x$$
$$\text{IF} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\log_e x} = x^2$$

(C)– (III)

$$(D) 2xdy + \left(3x^2 + 2y\right)dx = 0$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -\frac{3}{2}x$$
$$\text{IF} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\log_e x} = x$$

(D) - (II)

Q38 Text Solution:

एकैक:

- सम के लिए $n = 2k, f(2k) = 2k - 1$
- विषम के लिए $n = 2k + 1, f(2k + 1) = 2k + 2$

फलन एकैक है।

आच्छादी:

- किसी भी विषम संख्या $m = 2k - 1$ का पूर्वप्रतिबिंब $n = 2k$ (सम) होता है।
- किसी भी सम संख्या $m = 2k + 2$ का पूर्वप्रतिबिंब $n = 2k + 1$ (विषम) होता है।

इसलिए, फलन आच्छादी है।

व्युत्क्रमणीय:

फलन f एकैक और आच्छादी दोनों हैं, यह व्युत्क्रमणीय भी है।

Q39 Text Solution:

माना, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cot x}{\text{cosec } x+\cos x}dx$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x}+\cos x}dx$$
$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{1+\sin x\cos x}dx \quad \text{.....(i)}$$

गुणधर्म का प्रयोग करने पर,

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \int_a^b f\left(a+b-x\right)dx$$
$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx$$
$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{1+\cos x\cdot\sin x}dx \quad \text{.....(ii)}$$

समीकरण (i) और (ii) को जोड़ने पर

$$\Rightarrow 2I = 0$$
$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cot x}{\text{cosec } x+\cos x}dx = 0$$

Q40 Text Solution:

दिया है:

X	0	1	2	Other wise
P(X)	k	2k	3k	0

$$(A)\ \sum P_i\left(X_i\right) = 1$$
$$\Rightarrow k + 2k + 3k = 1$$
$$\Rightarrow k = \frac{1}{6}$$
$$(B) P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$$
$$= k + 2k = 3k = 3 \times \frac{1}{6}$$
$$\Rightarrow P\left(x < 2\right) = \frac{1}{2}$$

$(C) E(X) = \sum X_i P(X_i)$

$= 0 \times k + 1 \times 2k + 2 \times 3k$

$= 8k = 8 \times \frac{1}{6}$

$\Rightarrow E(x) = \frac{4}{3}$

$(D) P(1 \le X \le 2) = P(X = 1) + P(X = 2)$

$= 2k + 3k = 5k$

$\Rightarrow P(1 \le X \le 2) = 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

∴ (A) - (IV), (B) - (III), (C) - (II), (D) - (I)

Q41 Text Solution:

दिया गया है,A एक वर्ग आव्यूह $A_{n\times n}$ है।

$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}$

$\Rightarrow A(\text{adj } A) = |A| I_n \quad \ldots\ldots (i)$

इसके अलावा, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ .....(ii)

[कथन (D) सही है]

समीकरण (i), से

$\Rightarrow A(\text{adj } A) = |A| I$

$\Rightarrow |A(\text{adj } A)| = ||A|| = |A|$

$\Rightarrow |A||\text{adj } A| = |A|^n$

$\Rightarrow |\text{adj } A| = |A|^{n-1}$

अतः कथन (A) सही है।

अतः कथन (A) और (D) सही हैं।

Q42 Text Solution:

मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A$ एक अदिश और विकर्ण आव्यूह है।

$A^T = A$ (A एक सममित आव्यूह है)

अतः, कथन (A), (B) और (D) सही हैं।

Q43 Text Solution:

$4x + y \ge 80$

$\Rightarrow \frac{x}{20} + \frac{y}{80} \ge 1 \quad \ldots\ldots (i)$

$x + 5y \ge 115$

$\Rightarrow \frac{x}{115} + \frac{y}{23} \ge 1 \quad \ldots\ldots (ii)$

$3x + 2y \le 150$

$\Rightarrow \frac{x}{50} + \frac{y}{75} \le 1 \quad \ldots\ldots (iii)$

$x, y \ge 0$

सुसंगत क्षेत्र C है।

Q44 Text Solution:

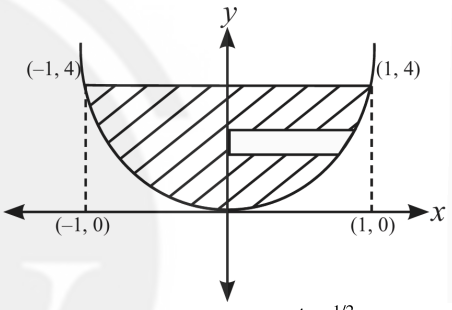
(d) दिया गया है, वक्र $4x^2 = y$ .....(i)

$y = 4$ .....(ii)

समीकरण (i) और (ii) से

$\Rightarrow 4x^2 = 4$

$\Rightarrow x = \pm 1$



छायांकित क्षेत्रफल, $A = 2\int_0^4 \frac{y^{1/2}}{2} dy$

$= \frac{2}{2} \cdot \frac{y^{3/2}}{3/2}\Big|_0^4$

$= \frac{2}{3}(4^{3/2} - 0)$

छायांकित क्षेत्रफल

$A = \frac{16}{3}$ वर्ग इकाई

Q45 Text Solution:

$I = \int e^x \left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x}}\right) dx$

$\Rightarrow I = \int e^x \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$

हम जानते हैं,

$\int e^x [f(x) + f'(x)] dx = e^x f(x) + c$

$\Rightarrow I = e^x \sqrt{x} + c$

Q46 Text Solution:

$$f(x)=\begin{cases} kx+1, & \text{if } x \le \pi \\ \cos x, & \text{if } x > \pi \end{cases}$$

f(x), $x = \pi$ पर संतत है,

$\Rightarrow f(\pi) = f(\pi^+) = f(\pi^-)$

$\Rightarrow k\pi + 1 = \lim_{h\to 0} \cos(\pi + h)$

$\Rightarrow k\pi + 1 = -1$

$\Rightarrow k = -\frac{2}{\pi}$

Q47 Text Solution:

दिया, $P = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

$(PQ)' = Q'P'$

$\Rightarrow (PQ)' = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (PQ)' = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Q48 Text Solution:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 1 \\ -\cos x & 1 & \cos x \\ -1 & -\cos x & 1 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \Delta = 1(1+\cos^2 x) - \cos x(-\cos x + \cos x) + 1(\cos^2 x + 1)$

$\Rightarrow \Delta = 1 + \cos^2 x - 0 + \cos^2 x + 1$

$\Rightarrow \Delta = 2(1 + \cos^2 x)$

$\Rightarrow \Delta = 2(1 + 1 - \sin^2 x)$

$\Rightarrow \Delta = 2(2 - \sin^2 x) \quad \ldots\ldots (i)$

$-1 \le \sin x \le 1$

$\Rightarrow 0 \le \sin^2 x \le 1 \quad \ldots\ldots (ii)$

$\Delta_{max} = 2(2-0) = 4$

$\Delta_{min} = 2(2-1) = 2$

अतः कथन (B), (C) और (D) सही हैं।

Q49 Text Solution:

$f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$f'(x) = \cos x + \frac{1}{2}(-2\sin 2x)$

$f'(x) = \cos x - \sin 2x$

अब f'(x)=0 रखकर क्रांतिक बिंदु ज्ञात कीजिए।

$\Rightarrow (\cos x - \sin 2x) = 0$

$\Rightarrow (\cos x - 2\sin x \cdot \cos x) = 0$

$\Rightarrow \cos x(1 - 2\sin x) = 0$

$\Rightarrow \cos x = 0 \text{ or } \sin x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ or } x = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow f(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}\cos(\frac{2\pi}{6})$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow f(\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow f(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}\cos(2 \cdot \frac{\pi}{2})$

$= 1 + \frac{1}{2} \times (-1) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(0) = \sin(0) + \frac{1}{2}\cos 2(0)$

$= 0 + \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$

इसलिए, परम अधिकतम मान $\frac{3}{4}$ है तथा परम न्यूनतम मान $\frac{1}{2}$ है।

अतः, (A), (B) और (D) कथन सही हैं।

Q50 Text Solution:

दी गई रेखाओं के दिशा अनुपात

$\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}, \vec{b} = 2\hat{j} + \hat{k}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \hat{i}(-2+4) - \hat{j}(1) + \hat{k}(2)$

$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$\hat{n} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = \frac{2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}}{\sqrt{4+1+4}}$

$\Rightarrow \hat{n} = \frac{2}{3}\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$