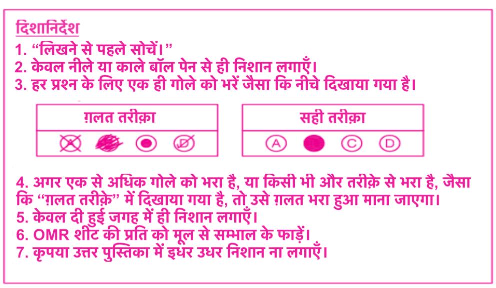
एम3

समय: 3 घंटे **प्रश्न: 30** **अधिकतम अंक: 100**

<u>दिशानिर्देश</u>

1. मोबाइल फ़ोन, स्मार्टफ़ोन, टैब्लेट, कैलकुलेटर, प्रोग्रामेबल घड़ी या किसी भी इलेक्ट्रॉनिक उपकरण का प्रयोग **पूर्णतः वर्जित** है। केवल साधारण पेन व पेंसिल ही परीक्षा केंद्र में ले जा सकते हैं।
2. उत्तरों की जाँच मशीनों से होगी। OMR शीट पर बुलबुलों को **नीले या काले पेन** से पूरी तरह भरें। कृपया **पेंसिल या जेल पेन का उपयोग <u>न करें</u>**। उत्तर सुनिश्चित करने के बाद ही बुलबुलों को भरें; वरना मिटाने पर OMR शीट ख़राब हो सकती है जिससे कि मशीन उत्तर नहीं पढ़ पाएगी।
3. अपूर्ण/ग़लत या ध्यान से नहीं भरी गई जानकारी की वजह से आप इस परीक्षा में अमान्य घोषित हो सकते हैं।
4. हर प्रश्न का उत्तर 1 या 2 अंकों की संख्या है। नीचे, पहले चित्र में बुलबुले भरने के सही व ग़लत तरीक़े, निर्देशों के साथ दर्शाए गए हैं। दूसरे चित्र में दर्शाया गया है कि 1-अंक व 2-अंक की संख्या को कैसे चिह्नित करेंगे।



5. OMR शीट पर लिखा गया उत्तर किसी काम का नहीं है। भरे हुए बुलबुले ही आपका उत्तर माने जाएँगे।
6. प्रश्न 1 से प्रश्न 10 तक हर सही उत्तर पर 2 अंक (marks) मिलेंगे, प्रश्न 11 से प्रश्न 20 तक हर सही उत्तर पर 3 अंक (marks) मिलेंगे व प्रश्न 21 से प्रश्न 30 तक हर सही उत्तर पर 5 अंक मिलेंगे।
7. सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
8. कोई ऋणात्मक अंक (negative marks) नहीं हैं।
9. सभी रफ़ कार्य प्रश्नों के नीचे दी गई ख़ाली जगह में करें। आपके पास प्रश्न-पत्र के अंत में भी रफ़ कार्य के लिए ख़ाली जगह है।
10. परीक्षा के बाद परीक्षार्थियों के लिए चिह्नित OMR शीट की प्रति आप ले जा सकते हैं।
11. अपनी OMR शीट की प्रति इस बार के ओलम्पियाड ख़त्म होने तक सम्भाल कर रखें; इसकी बाद में सत्यापन के लिए जरूरत पड़ेगी।
12. परीक्षा के उपरांत आप प्रश्न-पत्र अपने साथ ले जा सकते हैं।

नोटः

1. अगर अन्यथा ना दिया हो तो सभी संख्याएँ दशमलव प्रणाली में लिखी जाएँगी व किसी संख्या के अंकों से हमारा तात्पर्य दशमलव प्रणाली में लिखे जाने पर मिलने वाले अंकों से है।
2. यदि किसी कोण के माप के बाद $\circ$ लगाते हैं, तो हमारा तात्पर्य है कि इसे अंश (degree) में नापा गया है। जैसे कि दो लम्ब रेखाखंड 90° का कोण बनाते हैं।

प्रश्न

1. यदि एक 9×9 शतरंज की बिसात (बोर्ड) का मध्य वर्ग सफेद है तो बिसात में कितने सफेद वर्ग हैं? (एक शतरंज की बिसात के वर्ग सफ़ेद या काले रंग से ऐसे रंगे होते हैं कि अगल-बगल के वर्गों का रंग अलग-अलग हो।)
2. एक पूर्णांक M संख्या 4 से भाज्य है किंतु 256 से नहीं। अगर M को 256 से भाग दें तो अलग-अलग कितने शेष संभव हैं?
3. यदि $x_1, x_2, \ldots, x_{49}$ ऐसे ग़ैर-शून्य पूर्णांक हैं जिनके लिए $\sum_{i=1}^{49} x_i = 0$ है, तो $\sum_{i=1}^{49} x_i^2$ का न्यूनतम संभव मान क्या होगा?
4. तीन 2-अंकों की संख्याओं के सभी छह अंक अलग अलग हैं। यदि N ऐसी तीन संख्याओं का अधिकतम संभव योग है तो N के अंकों का योग क्या होगा?
5. एक त्रिभुज ABC में हमें दिया हुआ है कि $\angle CAB = 80^\circ$ है। यदि BC का लंब समद्विभाजक त्रिभुज ABC के परिवृत्त को N में मिलता है, जहाँ हमें दिया गया है कि A तथा N ज्या BC के एक ही तरफ़ हैं। तो $\angle NBC$ का मान अंश (degree) में क्या होगा?

रफ़ कार्य के लिए जगह

6. ऐसे कितने 2-अंकों के धन पूर्णांक n होंगे जिनके लिए $n = 26 + (a \times b)$, जहाँ a व b संख्या n के दोनों अंक हैं?

7. एक समलंब चतुर्भुज $ABCD$ के लिए यह दिया हुआ है कि भुजा AB भुजा CD के समांतर है। मान लो कि $AB = 3CD$, $CD = DA$ व $\angle CDA = 120^\circ$ है। यदि $ABCD$ का अधिकतम कोण x° है व न्यूनतम कोण y° है तो x/y का मान क्या होगा?

8. मान लो कि N ऐसा सबसे छोटा धन पूर्णांक है जिसके अंकों का योग 2026 है। तो $N + 1$ के पहले अंक (बाँये से) का मान क्या होगा?

9. समुच्चय $\{0, \dots, 20\}$ में ऐसे कितने पूर्णांक होंगे जो दो वर्ग पूर्णांकों के योग के रूप में लिखे जा सकते हैं?

रफ़ कार्य के लिए जगह

10. ऐसे कितने धन पूर्णांक n होंगे जो निम्न शर्तें संतुष्ट करते हैं:

a) n के अंक समुच्चय $\{1, 2, 4, 8\}$ से हैं। (अंक दोबारा भी आ सकते हैं।)

b) अंकों का योग 14 है।

c) यदि 1 अंक की तरह आता है, तो केवल 8 के ठीक दाहिने ओर ही आ सकता है।

11. एक 7×7 की बिसात को 49 इकाई वर्गों में बांट देते हैं। अब इसपर गोटियाँ ऐसे रखते हैं कि हर वर्ग पे अधिक से अधिक एक गोटी हो, तथा आव्यूह की हर पंक्ति तथा हर स्तंभ में सम-संख्या में गोटियाँ हों। अधिक-से-अधिक कितनी गोटियाँ ऐसे रखी जा सकती हैं?

12. वास्तविक गुणांक वाले ऐसे कितने ग़ैर-अचर बहुपद $P(x)$ हैं, जिनके लिए $P(x^2) = P(P(x))$ है।

रफ़ कार्य के लिए जगह

13. मान लो कि एक 3-अंकों की संख्या A के सभी अंक अलग-अलग हैं, व B वह संख्या है जो इन अंकों को उलटी तरफ़ से लिखने पर मिलती है। तो $|A-B|$ के किसी अभाज्य गुणनखंड का अधिकतम संभव मान क्या है?

14. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में $\angle ACB = 90^\circ$ है। एक बिंदु D भुजा BC पर ऐसे स्थित है कि $\angle ADC = 75^\circ$ है। यदि त्रिभुज ADC का क्षेत्रफल 81 है, तो खंड BD की लम्बाई कितनी होगी?

15. यदि a, b, c, d ऐसे धन पूर्णांक हैं जिनके लिए $a^2 + b^2 - cd^2 = 2026$ है तो $a + b + c + d$ का न्यूनतम संभव मान क्या होगा?

रफ़ कार्य के लिए जगह

16. मान लो कि P एक नियमित बहुभुज है जिसके 8 कोने हैं। P के निर्देशीकरण से हमारा तात्पर्य है कि किसी क्रम में हर कोने के लिए $1, 2, \ldots, 8$ पूर्णांक निर्धारित कर दें। एक निर्देशीकरण को **अच्छा** मानेंगे यदि रेखाखंड 1 से 2, 2 से 3, ... व 7 से 8 वाला पथ स्वयं को प्रतिच्छेदित नहीं करता है। यदि कुल N अच्छे निर्देशीकरण हैं तो N को 100 से भाग देने पर कितना शेष प्राप्त होगा?

17. वास्तविक संख्याओं का एक अनुक्रम $a_1, a_2, a_3, \ldots$ सभी $n \geq 1$ के लिए निम्न समीकरण को संतुष्ट करती है

$$\frac{a_{n+3} - a_{n+2}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{a_{n+3} + a_{n+2}}{a_n + a_{n+1}}.$$

मान लो कि $a_{55} = 6$, $a_{66} = 2$ व $a_{77} = 1$ है। यदि योग $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2026}^2$ को N द्वारा निर्दिष्ट करते हैं, तो N के अंकों का योग क्या होगा?

18. मान लो कि M निम्न दो गुणों वाला सबसे छोटा धन पूर्णांक है:

   a) M का सबसे बाँयी ओर वाला अंक 3 है।

   b) यदि N वह संख्या है जो इस 3 को हटा कर इकाई की जगह रखने, व हरेक अंक को बाँयी ओर एक बार सरकाने पर प्राप्त होती है, तो $N = M/4$ है।

तो M के अंकों का योग क्या होगा?

रफ़ कार्य के लिए जगह

19. धन पूर्णांकों के ऐसे कितने क्रमागत-त्रिक (x, y, z) होंगे जिनके लिए $1 \leq x, y, z \leq 8$ है व

$$|x-y|+|y-z|+|z-x|=8 \text{ है।}$$

20. चार बिंदु A, B, C व D, इसी क्रम में, एक सीधी रेखा में हैं। एक बिंदु E, जो कि इस रेखा पर नहीं है, ऐसा है कि $\angle AEB = \angle BEC = \angle CED = 45^\circ$ है। मान लो कि F व G क्रमशः AC व BD के मध्य-बिंदु हैं। यदि $\angle FEG = x^\circ$, तो x का मान क्या है?

21. एक 1×5 के आयत को छोटी भुजा के समांतर चार रेखाखण्डों से पाँच 1×1 के वर्गों में विभाजित किया जाता है। ऐसा करने पर जो सोलह इकाई-लंबाई के रेखाखंड मिलते हैं, उनमें से प्रत्येक को लाल, नीला, या हरा रंग दिया जाता है। एक 1×1 वर्ग को **रंगीला** कहेंगे अगर उसकी भुजाओं को रंगने में तीनों रंगों का प्रयोग किया गया हो। यदि ऐसे N तरह से रंग सकते हैं ताकि पांचों 1×1 वर्ग रंगीले हों तो N को 100 से भाग देने पर शेष ज्ञात करो।

रफ़ कार्य के लिए जगह

22. यदि $E = \{p^4 + p^2 - 2 \mid p$ एक अभाज्य संख्या है, $p > 3\}$ है, तो ऐसा अधिकतम धन पूर्णांक कौन-सा होगा जिससे E की सभी संख्याएँ भाज्य हों?

23. यदि $ABCD$ एक आयत है व BD पर बिंदु E ऐसे स्थित है जिससे कि AE और BD लम्ब हैं। यदि $AE = 12$ व $CE = \sqrt{193}$, तो आयत $ABCD$ का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

24. सम्मिश्र संख्याएँ x, y, z निम्न समीकरण संतुष्ट करती हैं:

$$x^2 + y^2 + z = xy$$
$$x + y^2 + z^2 = yz$$
$$x^2 + y + z^2 = xz$$

तो $|(x^2 - y)(y^2 - z)(z^2 - x)|$ के जितने अलग-अलग मान संभव हैं, उनका योग ज्ञात करो।

रफ़ कार्य के लिए जगह

25. मान लो कि छह संख्याओं $0, 1, 2, 3, 10, 23$ को अलग-अलग क्रम में व्यवस्थित कर के N अलग-अलग 8-अंकों की संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, जहाँ किसी भी 8 अंकों की संख्या का प्रथम अंक शून्य नहीं हो सकता। तो N के अंकों का योग ज्ञात करो।

26. एक तल में n बिंदु हैं, जिनमें कोई भी तीन समरेख नहीं हैं। हर दो बिंदुओं को एक रेखाखंड से जोड़ते हैं जिसे लाल या नीला ऐसे रंगते हैं कि निम्न शर्तें संतुष्ट हों:

    (a) यदि A, B, C कोई तीन ऐसे बिंदु हैं कि AB लाल है व BC नीला है, तो AC लाल होगा।

    (b) किसी भी बिंदु A के लिए ठीक तीन ऐसे बिंदु B, C, D मिलेंगे ताकि AB, AC, AD लाल हों।

    n के जो भी मान संभव हैं, उनका योग ज्ञात करो।

27. एक उत्तल बहुभुज की भुजाओं की लंबाई क्रमशः $\sqrt{a}$, $\sqrt{a+3}$, $\sqrt{a+2}$ व $\sqrt{2a+5}$ है। दोनों विकर्णों की लंबाई $\sqrt{2a+5}$ है। यदि θ° बहुभुज के सबसे बड़े कोण व दूसरे सबसे बड़े कोण का अंतर है, तो θ का मान ज्ञात करो।

रफ़ कार्य के लिए जगह

28. यदि $a_1, a_2, \ldots$ व $b_1, b_2, \ldots$ धन पूर्णांकों के ऐसी निरंतर वर्धमान अनुक्रम हैं जिनके लिए

(a) $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ सभी $n \geq 2$ के लिए,

(b) $b_n = 2b_{n-1}$ सभी $n \geq 2$ के लिए,

(c) $a_{10} = b_{10} < 2026$ है,

तो $a_1 + b_1$ के सभी संभव मानों का योग निकालो।

29. मान लो कि $n = \dfrac{4^{31} - 1}{3}$ है। यदि 2^{n-1} को n से भाग देंगे तो क्या शेष प्राप्त होगा?

30. दिया गया है कि एक त्रिभुज ABC में $\angle CAB = 50^\circ$ व $\angle ABC = 70^\circ$ है। भुजा BC व AC पर बिन्दु D व E क्रमशः ऐसे चुनते हैं कि $\angle ABE = \angle DAB = 30^\circ$ है। यदि $\angle DEB = x^\circ$ तो x का मान क्या होगा?

रफ़ कार्य के लिए जगह